ANNEE 2000

CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS MP

DEUXIÈME ÉPREUVE
DE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 14

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

T.S.V.P.

PROBLEME

On s'intéresse à des structures composées de points du plan ou de l'espace reliés par des barres et des fils. Les extrémités des barres sont à distance fixe (la longueur de la barre) et deux points liés par un fil sont à distance au plus la longueur du fil.

Une structure sera dite *rigide* si toute modification arbitrairement faible des distances de ses points, compatible avec les égalités déterminées par les barres et fils, est en fait obligatoirement nulle.

On veut déterminer pour quelques structures si elles sont rigides.

1. On considère un triangle équilatéral ABC de côté L. Les paires AB et AC sont des barres de longueur L et BC est un fil de longueur L.
Vérifier que cette structure n'est pas rigide.

2. On a à présent un carré $ABCD$; les côtés sont des fils de longueur L et les diagonales AC et BD sont des barres de longueur $L\sqrt{2}$. On veut vérifier que cette structure est rigide. Soit donc 4 points A,B,C,D de l'espace avec $AC = BD = L\sqrt{2}$ et les autres distances $\leq L$. Soit O le milieu de AC.

Montrer que la longueur OB vérifie $2OB^2 + OA^2 + OC^2 = AB^2 + BC^2$.

En déduire $OB \leq \dfrac{L\sqrt{2}}{2}$.

Démontrer que $OD \leq \dfrac{L\sqrt{2}}{2}$.

Utiliser alors $BD = L\sqrt{2}$ et justifier que $ABCD$ est nécessairement un carré.

3. On considère la structure plane suivante. ABC est un triangle équilatéral et O est son centre. Les 3 paires OA, OB, OC sont des barres de longueur L, BC est une barre de longueur $L\sqrt{3}$ et AB, AC des fils de longueur $L\sqrt{3}$. On place OBC, avec $OB = OC = L$ et l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$, et A avec $OA = L$ et $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) = \alpha$.

Pour quelles valeurs de α entre 0 et 2π les inégalités correspondant aux fils sont-elles vérifiées ?
La structure plane proposée est-elle rigide ?
Reste-t-elle rigide dans l'espace à trois dimensions ?

4. On considère à présent un triangle équilatéral ABC avec son centre O. Les 3 paires OA, OB, OC sont des barres de longueur L et AC,AB,BC des fils de longueur $L\sqrt{3}$.On veut examiner la rigidité de cette structure dans le plan

On prend dans le plan 3 vecteurs de longueur L, soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ formant des angles obtus, c'est-à-dire que les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{v}.\vec{w}$ sont strictement négatifs.

Montrer qu'il existe trois réels strictement positifs a, b, c tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$. On pourra pour cela décomposer $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en leurs composantes $\vec{v_1}$ et $\vec{w_1}$ colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v_2}$, $\vec{w_2}$ orthogonales à $\vec{u}$.

Montrer que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, et préciser le cas d'égalité.

Calculer le carré scalaire de $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$ et en déduire que $0 \geq ab(L^2+2\vec{u}.\vec{v})+bc(L^2+2\vec{v}.\vec{w})+ac(L^2+2\vec{u}.\vec{w})$.

Sachant que les inégalités correspondant aux fils doivent être vérifiées, en déduire que les trois produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{v}.\vec{w}$ valent $-\frac{L^2}{2}$.

Conclure.

5. On prend cette fois une structure de l'espace, formée d'un tétraèdre régulier $ABCD$ et de son centre O. Les paires OA, OB, OC et OD sont des barres de longueur L, et les 6 autres sont des fils de longueur $\frac{2L\sqrt{6}}{3}$. On prend 4 vecteurs de longueur L, soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$, formant des angles obtus.

Montrer qu'il existe quatre réels strictement positifs a, b, c, d tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}+d\vec{t}=\vec{0}$.

Montrer que $3(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq 2(ab+bc+ca+ad+bd+cd)$ et préciser le cas d'égalité.

Calculer le carré scalaire de $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}+d\vec{t}$ et en déduire que les six produits scalaires des vecteurs entre eux valent $-\frac{L^2}{3}$.

Conclure.

6. On considère la structure formée de 5 points $OABCD$: elle est composée de 4 barres, qui sont AB, BC, CA de longueur 1 et OD de longueur $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, et de 6 fils de longueur 1 qui joignent O et D à chacun des points A, B, C. $OABC$ et $ABCD$ sont donc deux tétraèdres réguliers.
Cette structure est-elle rigide ?

(Pour cette question, on pourra considérer la matrice de Gram du système de vecteurs $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$, et le déterminant de celle-ci comme fonction de 6 variables, les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$, et évaluer les dérivées partielles du déterminant par rapport à ces variables au point où ces longueurs valent toutes 1.)

7. On considère la structure formée d'un cube, dont les 12 arêtes sont des barres de longueur L et les quatre diagonales joignant des points diamétralement opposés des fils de longueur $L\sqrt{3}$.
Cette structure est-elle rigide ?

FICHE D'ÉVALUATION DES SUJETS DE CONCOURS

Libellé complet de l'épreuve (concours, filière,...) : ECOLE DE L'AIR, EPREUVE 2, MP.

Nom Frédéric DUPRÉ Lycée Camille VERNET, Valence

Classe MP

Adresse personnelle 884 chemin de Raquet, 07130 SAINT SORNIN

Tel 04-75-60-87-19 Fax —

Titre proposé pour l'épreuve *(Ce titre est destiné à la table des matières du bulletin « concours »)*

Rigidité de structures composés de barres et de fils

ÉVALUATION (les questions suivantes sont posées seulement pour fournir un cadre d'analyse)

I . <u>Erreurs d'énoncé – influence des calculatrices</u>

Erreurs d'énoncé : —

L'utilisation d'une calculatrice performante (disposant d'un logiciel de calcul formel) était-elle avantageuse ?

Calculatrice parfaitement inutile.

II . <u>Conformité au programme</u>

À la lettre (signaler dans le détail les questions hors-programme) : Pas de problème majeur. Toutefois, les élèves savaient sans hésitation ce qu'est un déterminant de Gram ? Fin de la question 6 hyper-limite !!

À l'esprit : Totalement à côté de la plaque !

Les parties du programme abordées vous paraissent-elles suffisamment étendues ?

Ce problème n'utilise réellement aucune partie du programme !

Parmi les qualités suivantes quelles sont celles qui vous semblent être le plus testées ?

- connaissances précises (cours)..... inutile .....
- « savoir-faire » technique..... inutile .....
- capacité de modéliser..... plus ou moins .....
- imagination dans une situation un peu nouvelle..... certe ! .....
- savoir choisir une méthode parmi plusieurs..... non, évaué plutôt d'instinct .....
- autres..... Faculté d'adaptation, courage de réfléchir sans appliquer des recettes _

Originalité du sujet .....

..... Rien à dire de ce côté-là ! .....

.....

Intérêt mathématique du sujet.....

..... Plutôt intéressant, mais hélas peu .....
dans l'esprit de la Spé' .....

III. Tri. Niveau de difficulté

Longueur du sujet ..... Très court ! .....

.....

.....

Difficulté. Caractère progressif..... les 5 premières questions (sur 7) sont .....
franchement faciles, pour un candidat qui accepte de jouer le jeu. Question 6 à mon avis infaisable, même .....
Pensez-vous que les notes des candidats seront significatives : par un bon MP*.

- pour le premier tiers..... ? .....
- pour les deux premiers tiers..... .....
- pour tous les candidats..... .....

Autres remarques..... la question 5 est parfaitement redondante .....
avec la question 4, ce qui est plutôt dommage .....
pour un problème ne comportant que 7 questions .....
(dont 2, dont je parierais qu'aucun candidat .....
ne les aura abordées, on parie ?) .....

la question 6 pouvait aisément être subdivisée en 5 ou 6 sous-questions ...

Pour permettre de détailler la table des matières du bulletin « concours », merci de bien vouloir répondre aux questions suivantes :

- parmi les différentes parties du problème, quelles sont celles qui partent uniquement sur le programme de première année ? 1, 2, 3, 4, 5, 7
- indiquez si chacun des chapitres suivants est utilisé. S'il n'est utilisé que dans une partie du problème, indiquez laquelle

1. Fonctions d'une variable réelle :
2. Suites et séries numériques :
3. Intégration sur un segment :
4. Suites et séries de fonctions :
5. Séries entières :
6. Séries de Fourier :
7. Intégrales sur un intervalle quelconque :
8. Intégrales à paramètres :
9. Équations différentielles :
10. Fonctions de plusieurs variables : Q.6
11. Intégrales multiples :
12. Espaces vectoriels normés :
13. Structures algébriques :
14. Arithmétique :
15. Polynômes, fractions rationnelles :
16. Espaces de dimension finie, matrices, déterminants,:
17. Réduction des endomorphismes :
18. Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques :
19. Géométrie affine et euclidienne :
20. Courbes planes :
21. Coniques :
22. Quadriques :
23. Courbes de l'espace, surfaces :

- Autres chapitres :

Merci d'avoir bien voulu prendre le temps de répondre à toutes ces questions !